Licence de mathématiques

Mohamed Aqalmoun

Histoire et épistémologie des mathématiques

Module *M*17

Cahier-Cours

ENS-FES

Table des matières

1 Les grandes phases historiques des mathématiques **1**
1.1 Les Mésopotamiens 3
1.2 Les Grecques 8
1.3 Les Musulmans (les arabes) 11
1.4 Renaissance Européen 15

2 Émergence et développement de certains concepts **19**
2.1 Concept du nombre 19
2.2 Notion d'équation 21
2.3 Concept de fonction 22
2.4 Concept d'ensemble 24

Chapitre 1

Les grandes phases historiques des mathématiques

Origine du mot "Mathématique" :
Le mot « mathématique » a pour origine le nom d'une catégorie d'élèves de l'école pythagoricienne. Au V^e siècle avant J.-C.(Jésus Christ), Pythagore délivrait son enseignement en public, tout en réservant une partie plus approfondie à un public restreint, les Pythagoriciens. Parmi ceux-ci, deux groupes, qui s'opposaient parfois d'ailleurs violemment :

- les **akoutiskoï** qui, se contentant d'écouter recevaient un enseignement (akousmata, les choses entendues) sans aucune démonstration,
- les **mathematikoï** qui, eux, recevaient l'enseignement au complet (de mathema, la science, c'est-à-dire chez les Grecs toute la connaissance), donné par le maître lui-même, d'où le mot « mathématique ».

Nous noterons qu'en grec aussi bien qu'en latin, le mot « mathematica » est toujours au pluriel ; c'est pourquoi on parle «des» mathématiques. Ce n'est qu'au XIX^e siècle qu'on a employé ce mot au singulier, dans une tentative d'unifier cette discipline.

L'histoire des mathématiques commence avec celle de l'humanité puisque les peuples du paléolithique comptaient déjà les entaille sur les os. Les figures et les nombres n'ont cessé depuis de hanter l'esprit humain. L'Antiquité jusqu'à vers l'An Mil est une période spécialement féconde de l'aventure mathématique.

La bergère : *un scénario vraisemblable sous forme de mythe* :
La bergère descend de la colline en prenant de l'avance sur son troupeau. Elle court puis monte sur un rocher où elle retrouve les cailloux déposés le matin même. Son chien fait défiler les moutons à ses pieds. À chaque passage, la bergère enlève un caillou. Quand le dernier mouton est passé, trois restent sur le sol. Elle regarde vers la colline. Pas de trace de moutons. Elle crie aussitôt :
« *Chien ! Il manque trois moutons ! Va les chercher !* »
Laissons la bergère retrouver ses moutons. Son évocation illustre la naissance des nombres, à l'aube de l'humanité. Il s'agit d'une sorte de pense-bête, ou plutôt de pense-humain car si les chiens sont, comme nous, capables de distinguer qu'il manque un mouton parmi deux, trois ou quatre, aucun n'a jamais conçu l'artifice de la bergère pour le détecter dans un plus grand nombre. Même nos cousins les chimpanzés en sont incapables. La méthode permet d'ajouter ou de soustraire. Si vous réunissez deux troupeaux , assemblez leurs cailloux et vous obtiendrez un tas correspondant au troupeau total. En version guerrière, une armée peut ainsi facilement compter ses pertes. Avant de partir en campagne, chaque homme dépose un caillou dans un lieu consacré. Au retour, chacun en retire un. Le tas restant représente les pertes . Toutes ces opérations sont simples à réaliser et ne deviennent fastidieuses qu'avec les grands nombres, que l'on rencontre au niveau de la gestion d'un état ou d'un grand domaine.
Quelques millénaires plus tard, un comptable croule sous les cailloux. Le sol autour de lui en est couvert. À sa droite, se trouve le tas des moutons. À sa gauche, celui des vaches, derrière, ce lui des chevaux. Le domaine dont il s'occupe est immense, et il passe a vie à manipuler des cailloux : en enlever en cas de mort ou de vente, en ajouter pour les naissances, etc. Pour faciliter son travail, devant chaque tas, il en regroupe quelques uns à part, en petites pyramides. Il a sa technique : un caillou par doigt. Autrefois, son père a imaginé cet artifice pour gagner du temps. Ainsi, il est entouré de trois gros tas, chacun précédé d'un bon nombre de pyramides. Une main, à peine, sépare les moutons des vaches ou des chevaux. Un jour, il le sent, les tas se mélangeront. . .et les ennuis commenceront. Le maître ne plaisante pas avec les comptes ! Comment faire ? Il regarde à l'extérieur. Des ouvriers construisent un mur, en manipulant de gros blocs. L'un d'eux crie :
« *Mets des petits ici à la place d'un gros. . .* »
Cette réflexion fait jaillir un éclair dans l'esprit du comptable : comme les maçons, remplacer un tas de petits cailloux par un gros ! Quelques générations plus tard, l'un de ses successeurs a l'idée de faire de pyramides de gros cailloux et de le remplacer par d'autre encore plus gros.

Ces cailloux sont les premiers chiffres de l'histoire de l'humanité, c'est-à-dire la première façon d'écrire les nombres ; avant même l'invention de l'écriture, le premier alphabet.

1.1 Les Mésopotamiens

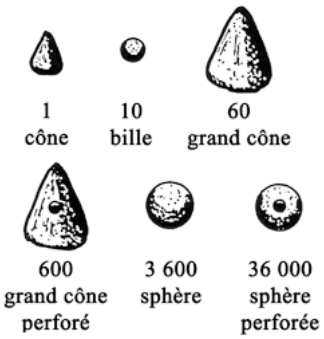
La Mésopotamie est le nom qui avait été donné par les Grecs à la grande plaine située entre le Tigre et l'Euphrate. La basse vallée de ces fleuves s'étend dans ce qui est aujourd'hui le sud de l'Irak, et une partie de la moyenne et haute vallée occupe le nord de l'Irak. L'ensemble des régions où ont été écrits des textes cunéiformes savants, notamment mathématiques, est plus vaste encore, et inclut l'est de la Syrie, le sud de la Turquie et l'Elam, une région située à l'ouest de l'Iran actuel.

L'histoire de la mésopotamie s'étend sur une durée de 4000 ans. La période la plus riche en documents mathématiques connus à ce jour est la période dite paléo-babylonienne, de 2000 à 1600 avant J.C. (Jésus Christ). Les plus anciennes traces d'écriture apparaissent vers 3600 avant J.C. sur des tablettes d'argiles provenant du sud de la Mésopotamie (Uruk) et de l'ouest de l'Iran actuel (Elam).

Mésopotamie

La phase mésopotamienne porte sur deux périodes : Période des sumériens (3300 avant J.C.), et la période des Babyloniens (2000 avant J.C.)

Les Sumériens [1] **:**
On attribue aux Sumériens l'invention de l'écriture, vers l'an −3300 de notre ère. Ils sont également les auteurs d'une manière de compter. Les nombres (entiers) étaient représentés par de petits objets, fabriqués avec de l'argile, qui désignaient les quantités : 1, 10, 60, 600 = 10 × 60, 3600 = 60 × 60 et 36000 = 10 × 60 × 60.



Un nombre était représenté à l'aide de cônes et de billes (voir ci-contre). Les objets qui composaient ce nombre étaient placés dans une boule creuse en argile, que l'on refermait par un bouchon d'argile et qu'on marquait d'un sceau. Pour connaître le nombre associé à cette boule (appelée aussi bulle), il fallait la briser et compter les cailloux présents à l'intérieur. Le mot calcul vient de calculi (traduction latine de cailloux).

Exemples :

1. Le nombre 37 est représenté par 3 billes et 7 cônes.
2. Le nombre 105 est représenté par un grand cône, 4 billes et 5 cônes.

Région Sumer et Babylone

1. Sumer : Sumer est une région antique, située à l'extrême sud de la Mésopotamie antique (actuel Irak)

Les Babyloniens :
Les mathématiques de Mésopotamie sont les plus anciennes qui soient parvenues jusqu'à nous. Plus de 2000 tablettes d'argile [2] à contenu mathématique, provenant d'Irak, de Syrie et d'Iran, ont été déchiffrées à ce jour.

Une tablette d'argile

Les Babyloniens, premiers « inventeurs », n'utilisaient que deux symboles, le clou et le chevron. On commence par compter avec des clous de 1 à 9. Puis on utilise un chevron pour le dix, deux pour le vingt, etc. On pourrait ainsi continuer jusqu'à cent, mais pour éviter les confusions (ou en rajouter ?), la numération babylonienne reprend le clou pour marquer 60 . Ainsi, chaque nombre de 1 à 59 est représenté par une configuration unique de clous précédé de chevrons. Puis on repart avec un clou, des chevrons et des clous jusqu'à 120 (deux clous) et ainsi de suite jusqu'à 600, qui au lieu de dix clous, est à nouveau représenté par un chevron. . .
Formidable ! On peut dès lors compter aussi loin que l'on veut, avec seulement deux symboles ! Il suffit de savoir que le premier groupement de symboles à droite représente un nombre entre 1 et 59, que le deuxième est entre 60 et 3599, et ainsi de suite. Mais cette numération , si elle marque à coup sûr un progrès décisif sur le nombre de symboles à employer pour écrire des grands nombre, entraîne encore des ambiguïtés. Par exemple, si on écrit un chevron tout seul, que signifie-t-il ? 10 ou 600 ? Et trois clous représentent-il 3 (trois clous côte à côte), 62 (un clou tout seul puis deux groupés), 121 (deux clous puis un tout seul), 3661 (trois clous séparés) ? Tout dépend de l'espacement entre chaque symbole, et du contexte. Une erreur peut donc vite arriver, ce qui aurait des conséquences particulièrement cocasses si elle

2. Durant l'Antiquité, les tablettes en argile sont des petites tablettes à écrire en argile.

concernait, par exemple, le montant d'un compte en banque !

La numération babylonienne est sexagésimale positionnelle relative (flottante) : détaillons ces principes. L'écriture des nombres babyloniens repose sur deux signes, un clou (…) pour 1 et un chevron (…) pour 10. On compose 59 « chiffres » en répétant les 1 et les 10 autant que nécessaire, selon un principe additif décimal :

- Les unités : (𒁹) pour 1, (𒁹𒁹) pour 2,...
- Les dizaines : (𒌋) pour 10, (𒌋𒌋) pour 20,...

Par exemple le nombre 35 s'écrit (……), et le nombre 59 s'écrit (……).

Voici les 59 chiffres cunéiformes des tablettes à l'époque paléo babylonienne.

	𒁹	𒁹𒁹	𒁹𒁹𒁹	𒁹𒁹𒁹𒁹	𒁹𒁹𒁹𒁹𒁹	𒁹𒁹𒁹𒁹𒁹𒁹	𒁹𒁹𒁹𒁹𒁹𒁹𒁹	𒁹𒁹𒁹𒁹𒁹𒁹𒁹𒁹	𒁹𒁹𒁹𒁹𒁹𒁹𒁹𒁹𒁹
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
𒌋	𒌋𒁹	𒌋𒁹𒁹	𒌋𒁹𒁹𒁹	𒌋𒁹𒁹𒁹𒁹	𒌋𒁹𒁹𒁹𒁹𒁹	𒌋𒁹𒁹𒁹𒁹𒁹𒁹	𒌋𒁹𒁹𒁹𒁹𒁹𒁹𒁹	𒌋𒁹𒁹𒁹𒁹𒁹𒁹𒁹𒁹	𒌋𒁹𒁹𒁹𒁹𒁹𒁹𒁹𒁹𒁹
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
𒌋𒌋	𒌋𒌋𒁹	𒌋𒌋𒁹𒁹	𒌋𒌋𒁹𒁹𒁹	𒌋𒌋𒁹𒁹𒁹𒁹	𒌋𒌋𒁹𒁹𒁹𒁹𒁹	𒌋𒌋𒁹𒁹𒁹𒁹𒁹𒁹	𒌋𒌋𒁹𒁹𒁹𒁹𒁹𒁹𒁹	𒌋𒌋𒁹𒁹𒁹𒁹𒁹𒁹𒁹𒁹	𒌋𒌋𒁹𒁹𒁹𒁹𒁹𒁹𒁹𒁹𒁹
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
𒌋𒌋𒌋	𒌋𒌋𒌋𒁹	𒌋𒌋𒌋𒁹𒁹	𒌋𒌋𒌋𒁹𒁹𒁹	𒌋𒌋𒌋𒁹𒁹𒁹𒁹	𒌋𒌋𒌋𒁹𒁹𒁹𒁹𒁹	𒌋𒌋𒌋𒁹𒁹𒁹𒁹𒁹𒁹	𒌋𒌋𒌋𒁹𒁹𒁹𒁹𒁹𒁹𒁹	𒌋𒌋𒌋𒁹𒁹𒁹𒁹𒁹𒁹𒁹𒁹	𒌋𒌋𒌋𒁹𒁹𒁹𒁹𒁹𒁹𒁹𒁹𒁹
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
𒌋𒌋𒌋𒌋	𒌋𒌋𒌋𒌋𒁹	𒌋𒌋𒌋𒌋𒁹𒁹	𒌋𒌋𒌋𒌋𒁹𒁹𒁹	𒌋𒌋𒌋𒌋𒁹𒁹𒁹𒁹	𒌋𒌋𒌋𒌋𒁹𒁹𒁹𒁹𒁹	𒌋𒌋𒌋𒌋𒁹𒁹𒁹𒁹𒁹𒁹	𒌋𒌋𒌋𒌋𒁹𒁹𒁹𒁹𒁹𒁹𒁹	𒌋𒌋𒌋𒌋𒁹𒁹𒁹𒁹𒁹𒁹𒁹𒁹	𒌋𒌋𒌋𒌋𒁹𒁹𒁹𒁹𒁹𒁹𒁹𒁹𒁹
40	41	42	-43	44	45	46	47	48	49
𒌋𒌋𒌋𒌋𒌋	𒌋𒌋𒌋𒌋𒌋𒁹	𒌋𒌋𒌋𒌋𒌋𒁹𒁹	𒌋𒌋𒌋𒌋𒌋𒁹𒁹𒁹	𒌋𒌋𒌋𒌋𒌋𒁹𒁹𒁹𒁹	𒌋𒌋𒌋𒌋𒌋𒁹𒁹𒁹𒁹𒁹	𒌋𒌋𒌋𒌋𒌋𒁹𒁹𒁹𒁹𒁹𒁹	𒌋𒌋𒌋𒌋𒌋𒁹𒁹𒁹𒁹𒁹𒁹𒁹	𒌋𒌋𒌋𒌋𒌋𒁹𒁹𒁹𒁹𒁹𒁹𒁹𒁹	𒌋𒌋𒌋𒌋𒌋𒁹𒁹𒁹𒁹𒁹𒁹𒁹𒁹𒁹
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59

Le zéro n'apparait qu'au 3ème siècle av. J.-C. sous forme d'un double chevron : 𒑚.

Au-delà de 59, la numération obéit à un principe de position à base 60 : une soixantaine s'écrit 1 (un clou) en deuxième position.
Exemples :

1. ……

2. .....
3. (l'ennui) .....

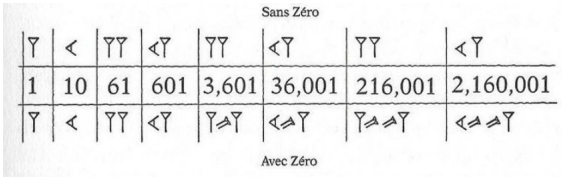
En général, selon sa position un clou (𒁹) est de valeur 60^n où $n \in \mathbb{Z}$, et un chevron (𒌋) est de valeur 10×60^n où $n \in \mathbb{Z}$.

Qui a inventé le premier zéro?
Jusqu'au III^e siècle avant J.-C., les Babyloniens se contentèrent pourtant de cette écriture, en laissant des espaces suffisamment larges et en se reposant sur le bon sens du lecteur. Et puis ils eurent l'idée toute simple de noter, avec deux clous en biais, les emplacements vides. Plus de confusion possible, même si la notation restait franchement lourde. Le premier zéro de l'histoire de l'humanité était né.
Mais ce n'était pas encore un nombre ou une quantité, il n'était pas utilisé dans les calculs. Le zéro ne servait que comme chiffre, il marquait une position vide dans le système de numération babylonien. La première trace du zéro nous parvient des babyloniens (III^e siècle avant J.C.). Leur système de numération tenant sur la combinaison du principe de position et du principe additif est parfois ambigu. Comment écrire par exemple le nombre « 305 » si on ne dispose pas du symbole « 0 ». On peut écrire « 3 5 », mais ne risque-t-on pas de confondre avec « 35 »? Les scribes ont l'idée d'un signe de séparation des symboles se présentant sous la forme d'un double chevron exprimant qu'il n'y a rien.

Symbol du zéro (ou le vide)

C'est le plus vieux zéro connu mais ce n'est pas encore un nombre ni même une quantité. On le qualifierait plutôt de «pense bête» ou de «marque-place» qui ne servait à autre chose que de fixer la bonne place des chiffres dans le système de numération de position.

Exemple :



Au III^e siècle, les Chinois, qui avaient également adopté une numération de position, marquèrent les emplacements vides par un point, puis par un petit marque, nos ancêtres vont bien finir par comprendre toute sa puissance ! Il faudra tout de même attendre le V^e siècle pour que le pas soit franchi.
Au carrefour de différentes civilisations avancées, l'Inde bénéficie de toutes les connaissances élaborées autour d'elle. Sa numération, mise au point entre le II^e siècle avant Jésus-Christ et le IV^e siècle est , au graphisme prêt, celle dont l'Occident va hériter quelque sept siècles plus tard grâce à l'entremise de la civilisation arabo-musulmane. Les savants indiens sont les premiers à adopter le bon nombre de symboles de base : si le I décalé d'un cran vaut 10, alors il faut neuf symboles distincts pour les nombres intermédiaires, neuf dessins bien différents les uns des autres, pour supprimer les répétitions qui alourdissent la notation. Et en plus, évidemment, un dernier chiffre pour marquer l'absence de quantité d'un certain rang, le zéro.

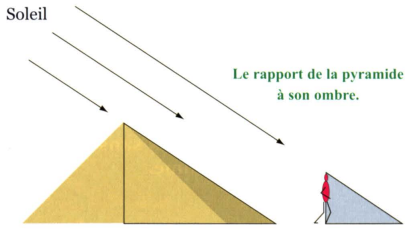
1.2 Les Grecques

Les premiers pas de la géométrie grecque se font avec Thalès de Milet (624-548 avant .J.C.), connu pour avoir calculé la hauteur de la pyramide de Kheops.
La géométrie devient déductive. Fini l'à-peu-près, les formules mènent à des valeurs exactes, les propriétés ne sont plus admises sur des exemples, mais sont démontrées dans le cas général. Deux écoles marquent cette période :
- La Fraternité pythagoricienne de Crotone, proche d'une secte, donne une interprétation mystique des nombres. On lui attribue la découverte de l'existence d'une longueur incommensurable (telle que $\sqrt{2}$),
- L'Ecole d'Alexandrie, fondée en 331 avant J.C., centre intellectuel de l'époque, connaît trois des plus grands savants de l'Antiquité : Euclide d'Alexandrie (320-260), Archimède de Syracuse (287-212) et Apollonius de Perge (262-190).
Commence ensuite une longue période de stagnation intellectuelle.

Thalès (vers –624 à –547) est connu des élèves du secondaire pour un théorème qu'il semble ne jamais avoir énoncé. Il est originaire de Milet à l'embouchure du Méandre sur la côte ouest de la Turquie actuelle. Aucun texte de lui ne nous est parvenu. Proclus (411 – 485), qui vivait 1000 ans après lui, indique qu'on lui attribuait les propositions suivantes : *Un diamètre partage*

un cercle en deux parties égales, Les angles à la base d'un triangle isocèle sont égaux, Les angles opposés par le sommet sont égaux et un cas d'égalité des triangles. En donnait-il des démonstrations ?
Selon la légende, Thalès de Milet (environ 626-547 avant J.C.) visita les pyramides lors d'un voyage en Égypte. Alors qu'il admirait celle de Khéops, le pharaon de l'époque le défia d'en trouver la hauteur. Thalès la détermina-t-il effectivement en appliquant une méthode fondée sur « son » théorème ?
Nous n'en avons aucune certitude. Peu importe ! Il est certain qu'Hiéronyme de Rhodes la connaissait quand il raconta cette histoire plus tard.

$$\textbf{Hauteur}_{\text{Pyramide}} = \frac{\textbf{Hauteur}_{\text{Thalèse}}}{\textbf{Longueur}_{\text{Ombre Thalèse}}} \textbf{Longueur}_{\text{Ombre Pyramide}}$$



L'histoire de Thalès est à la fois plus simple mathématiquement et plus compliquée astronomiquement. Sans doute ne connaissait-il pas le théorème qui porte aujourd'hui son nom. Selon la légende, il constata que l'ombre d'un bâton était égale à sa hauteur. La conclusion est alors facile : la hauteur est égale à la longueur de l'ombre. La mesure est donc possible quand la déclinaison solaire est égale à -15 degrés exactement c'est-à-dire les 2 novembre et 8 février. Une marge d'erreur de 1% sur la longueur de l'ombre permet un jour d'écart, une marge de 5% , cinq jours. Dans ce cas, 22 jours de l'année sont possibles pour cette belle histoire. Légende ou réalité ? Peu importe, il reste que, comme celle de Blake et Mortimer, l'ombre de Thalès plane toujours sur la grande pyramide.

D'**Euclide**, nous ne savons rien. Il aurait travaillé à Alexandrie. Quand ? Difficile de le dire. Les experts proposent entre –300 et –270 sans qu'aucune source permette de préciser plus.
Les manuscrits complets des Éléments qui ont été conservés ont été copiés plus de 1000 ans après Euclide sur des copies de copies, etc. On n'a longtemps connu que des manuscrits descendants d'une édition des Éléments

réalisée à la fin des années 300 par Théon d'Alexandrie (335-405), père de la seule mathématicienne connue de l'Antiquité, Hypathie (370 – 415) (morte assassinée, probablement par une secte de chrétiens fanatiques). En 1808, le bibliothécaire de l'École polytechnique, François Peyrard (1760 – 1822), découvrit parmi tous les documents du Vatican rapportés par Monge, un parchemin du dixième siècle, le codex 190, copié sur une version des Éléments antérieure à celle de Théon et en différant par endroits. On doit à Johan Heiberg (1854 – 1928), dans les années 1880, une édition critique des Éléments, s'appuyant sur de nombreux manuscrits dont le codex 190. On peut lire la traduction française de cette édition par Bernard Vitrac : Euclide d'Alexandrie, Les Éléments, 4 vol., 1990 – 2002, PUF, qui l'a considérablement enrichie de notes, commentaires et notices, avec une belle introduction de Maurice Caveing. C'est à elle que nous renvoyons les lectrices et lecteurs désirant mieux connaître les Éléments.
Pendant plus de 2000 ans, les Éléments ont été la base de la formation des mathématiciens du monde occidental. Le livre qui a été le plus publié depuis l'invention de l'imprimerie est la Bible, bien sûr ; mais le second, loin derrière tout de même, ce sont les Éléments d'Euclide.
Les Éléments comportent 13 livres. Les livres I à IV traitent de géométrie plane, les livres V et VI de la théorie des proportions, les livres VII à IX d'arithmétique, le livre X, aux dimensions imposantes, traite de problèmes d'irrationnalité, les livres XI à XIII de géométrie dans l'espace.
La première chose qui frappe en ouvrant les Éléments, c'est le langage et le style d'exposition, très proche du nôtre : des énoncés et des démonstrations. Euclide commence par donner ses définitions de point (*ce dont il n'y a aucune partie*), ligne droite (*celle qui est placé de manière égale par rapport aux points qui sont sur elle*), angle, angle aigu, cercle, diamètre, triangles isocèles, carré, etc. Les droites parallèles sont des droites qui, *étant dans le même plan ...ne se rencontrent pas...* On remarquera l'imprécision de la définition du point, l'obscurité de la définition de la droite, mais il faudrait les discuter dans le contexte de l'époque.

Euclide formule ensuite cinq demandes (ou axiomes) comme :

1) Par deux points distincts, il passe une droite et une seule.
2) Tout segment est prolongeable en une droite.
3) Deux points distincts étant donnés, il passe un cercle et un seul de centre le premier point et passant par le second.

4) Tous les angles droits sont égaux entre eux.
5) Par un point extérieur à une droite, il passe une droite et une seule parallèle à la droite donnée.

Ce dernier postulat aussi appelé Postulat d'Euclide est le fondement de la géométrie euclidienne.
Puisqu'il est admis, un mathématicien russe Nicolaï Ivanovitch Lobatchevski (1793 – 1856), un hongrois János Bolyai (1802 – 1860) et un allemand Carl Friedrich Gauss (1777 – 1855) affirmeront sa négation :

Il existe une infinité de parallèles passant par un point extérieur à une droite donnée.

Même si cela peut paraître surprenant, ils construisent, comme Euclide une nouvelle géométrie complète et cohérente, la première **géométrie non-euclidienne**.
Les livres VII, VIII et IX parlent d'arithmétique (science des nombres). Euclide travaille en particulier sur les nombres premiers (nombre ayant aucun diviseur autre que 1 et lui-même) et prouve entre autre que leur nombre est infini. Il ne l'affirme pas de cette manière car les grecs de l'Antiquité refusent toute idée de la notion d'infini actuelle. Il énonce :

Les nombres premiers sont plus nombreux que toute multitude de nombres premiers proposés.

Sa démonstration va dans ce sens. Soit un nombre premier : 7 par exemple. Démontrons qu'il en existe un plus grand. Formons alors le produit des nombres premiers inférieurs ou égaux augmenté de 1, soit $2 \times 3 \times 5 \times 7 + 1$. Ce nombre n'est pas divisible par 2, ni par 3, 5 ou 7. Il est donc premier et plus grand que 7. Ce raisonnement peut être reproduit avec tout nombre premier.
Il invente aussi un algorithme bien célèbre qui porte aujourd'hui le nom d'algorithme d'Euclide permettant de calculer le PGCD de deux nombres. Algorithme qu'il utilise également pour donner une méthode permettant de vérifier que deux nombres sont premiers entre eux.

1.3 Les Musulmans (les arabes)

À la maison de la sagesse, بَيت الحكمة :

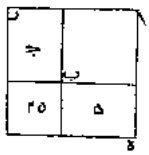
Le calife Al-Mamun, successeur du calife Haron Al-Rachid, a en main tous les pouvoirs et l'empire abbasside est à ses pieds. Dans la nouvelle "Maison de sagesse" (بَيت الحكمة) qu'il vient de faire construire pour y faire travailler ensemble des savants de tout le monde méditerranéen, il rend visite a son vizir (الوَزير) et lui demande si son travail avance. "Maître de tous les croyants", j'ai respecté vos ordres, les scribes sont à l'œuvre. Près de cent parmi les plus érudits traduisent les livres de Grecs. Déjà le livre des *Hypothèse de Ptolémée*, les *Conique d'Apollonius*, les *Éléments d'Euclide*, les *Sphères* et *les cylindres d'Archimède* se trouvent dans notre bibliothèque à la disposition de tes savants et de tes astronomes. Et la liste s'allonge de jour en jour. Très bientôt, l'Almageste de Ptolémée sera terminé.
Et puis l'histoire avance et le royaume poursuit sa croissance. À cette époque, Thabit Ibn Qurra et Qusta ibn Luqa sont en charge de l'astronomie. Ce sont Sahl al-Tabari et al-Hajjaj ben Yusuf les responsables des traductions : le calife al-Mamun compte sur eux pour diriger celle de l'Almageste de Claude Ptolémée. Les constructions de deux nouveaux observatoires, Shammasiya à Bagdad et Qasiyun à Damas sont achevées : l'étude du ciel sera entreprise. L'astronomie est a lors la science la plus noble, la plus haute puisque c'est celle qui se rattache aux exigences du culte. Il s'agit de déterminer avec précision le mois de prière et de jeûne : le ramadan.

Al-Khwarizmi, le magicien de l'algèbre :
Le nom de Mohammed ibn Musa al-Khwarizmi semble indiquer qu'il était originaire du Khwarezm, une province de l'Ouzbékistan, nous savons peu de choses avec certitude, sinon qu'il fit partie du groupe de savants arabes travaillant à la Maison de la sagesse, fondée par le calife al-Mamun. De ses ouvrages, cinq nous sont parvenus, qui traitent d'arithmétique, d'astronomie, de géographie, du calendrier et d'algèbre, et qui eurent une influence majeure sur le développement des mathématiques.
Le principal ouvrage mathématique d'Al-Khwarizmi est Al KitAb al Mukh-

tasar fi Hisab Al Jabr w'al-Muqabala, و الجبر حسَـاب فِي المختصَر الكِتاب المقابلة : Livre concis du calcul par les procédés du jabr et du muqabala :
☞ **Aljabr** : désigne la transposition des termes d'un membre dans l'autre d'une équation. De ce mot sera issue notre **algèbre** ,
☞ **Al-muqabala** : est la réduction des termes semblables dans chaque membre.
Dans les écrits d'al-Khwarizmi, pas de symbolisme, pas de lettres à la place des inconnues, seulement des nombres écrits en toutes lettres ou en chiffres romains, mais surtout la description très précise d'une technique particulière. Sa théorie concerne des équations du premier ou du second degré, à une inconnue. N'utilisant pas les nombres négatifs, il avait partagé les équations de degré 2 au six classes :

1. Les carrées sont égaux aux racines ($ax^2 = bx$),
2. Les carrés sont égaux au nombre ($ax^2 = c$),
3. Les racines sont égales au nombre ($bx = c$),
4. Les carrés plus les racines sont égaux au nombre ($ax^2 + bx = c$),
5. Les carrés plus un nombre sont égaux aux racines ($ax^2 + b = c$)
6. Les racines plus un nombre sont égales aux carrés ($bx + c = ax^2$)

Il montre comment les résoudre sur les exemples : $x^2 + 10x = 39$, $x^2 + 21 = 10x$, $3x + 4 = x^2$ (il préfère toujours se ramener au cas où $a = 1$, à l'aide de l'opération al-hatt, الحط).
La recette pour l'équation : $x^2 + 10x = 39$:
$\frac{10}{2} = 5 \to 5 \times 5 = 25 \to 25 + 39 \to \sqrt{64} = 8 \to 8 - \frac{10}{2} = 3$ (ce qui donne 3).



Un ouvrage probablement ultérieur d'Al Khwarizmi explique, pour le monde arabe, l'invention indienne du zéro (Al Khwarizmi, *Le calcul indien*, trad. par André Allard, Blanchard, 1992) ; il contient un premier exposé du système décimal et décrit l'usage d'un petit cercle pour noter l'absence d'unités, de dizaines, de centaines.... À partir de 1150, ce livre est à son tour traduit en latin à de très nombreuses reprises et diffusé dans toute l'Europe par des manuscrits appelés *algorismus*, déformation d'Al Khwarizmi, mot qui donne algorithme et a pris le sens de *procédé de calcul* que l'on sait. Le signe rond est alors appelé circulus ou cifre, transcription de l'arabe as-sifr. Le mot deviendra chiffre en français, zéro en italien. Attention, ce signe rond est un signe d'absence et non le signe représentant le nombre 0 dont Brahmagupta (598-670) avait énoncé les propriétés.

Ibn Haytham

Abu Ali al Hassan Ibn al Haytham (vers 965-1041) est connu en Occident sous le nom d'Alhazen, forme latine de son second prénom. Il est né à Bassorah. Ses textes les plus connus portent sur l'optique ; il dissèque des yeux, explique que la lumière se reflète sur les objets et pénètre dans l'œil (Ptolémée pensait que c'était l'œil qui envoyait de la lumière sur les objets), pose le problème de déterminer le point de réflexion d'un rayon lumineux sur un miroir sphérique, invente la chambre noire. Il a des idées sur l'attraction réciproque de deux corps en fonction de leur masse. Il cherche à montrer que les nombres parfaits pairs sont tous de la forme $2^{n-1}(2^n-1)$ avec 2^n-1 premier. Il affirme l'existence des objets mathématiques comme les lignes, les surfaces et les solides dans le domaine des idées, en faisant abstraction des objets concrets : *ceux qui existent pour les sens n'existent pas en vérité car les sens trompent souvent sans que l'opérateur le décèle* alors que *ceux qui existent en imagination existent vraiment et absolument* .... Al Haytham utilise beaucoup le mouvement ; par exemple, il définit une droite comme une ligne qui ne change pas si on la fait tourner autour de deux quelconques de ses points. Sa tentative de démonstration du cinquième postulat échoue car il s'appuie sur la proposition équivalente :

L'ensemble des points équidistants d'une droite et d'un même côté est une droite.

El Kashi

Ghiyath Al Kashi (autour de $1380-1430$) est un mathématicien perse connu

par sa formule de trigonométrie du triangle :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\sin\hat{A}$$

Lui aussi a pu faire des observations astronomiques précises grâce au magnifique observatoire construit à Samarkande par le prince mongol Ulug Beg (1393 – 1449). Il obtient $60\sin 1°$ avec une précision de 60^{-10}, en utilisant une méthode itérative ; il calcule π avec la même précision, en 1424, avec des polygones réguliers inscrits et circonscrits à un cercle, ayant 3×2^{28} côtés. Enfin, il expose l'usage des fractions décimales.

1.4 Renaissance Européen

La renaissance Européen a été une période de renouveau intellectuel en Europe, marquée par la redécouverte des mathématiques grecques et arabes, ainsi que par d'importantes avancées en algèbre, géométrie, trigonométrie et mécanique.
Parmi les figures majeures :
Léonarde de Pise (Fibonacci XIIIe cycle) : Introduction des chiffres arabes en Europe.

Léonard de Pise (vers 1170−1250), plus connu sous le nom de **Fibonacci**, est un mathématicien italien célèbre pour avoir introduit en Europe des chiffres arabes et la numération décimale, ainsi que pour sa célèbre suite de Fibonacci.
Fibonacci est né à Pise, en Italie, et a grandi à **Bougiah** (aujourd'hui Béjaia, en Algérie), où son père , un commerçant italien, était responsable d'un comptoir de commerce. c'est là qu'il découvre le système de numération arabe, bien plus efficace que le système romain. Il apprend aussi les mathématiciens arabes et indiens. De retour en Italie, il diffuse leurs connaissance en Europe à travers ses écrits. Il a popularisé l'usage de l'algèbre arabe en Europe.

Pierre de Fermat : Pierre Fermat (1607 – 1665) est né à Beaumont de Lomagne, en France. Il était avocat au parlement le Toulouse, mais sa passion était les mathématiques, qu'il pratiquait amateur. Il communiquait ses idées principalement à travers des lettres à d'autres mathématiciens, notamment Blaise Pascal et Marin Mersenne. Il ne publia presque rien de son vivant,

mais ses notes et correspondances ont révélé des découvert révolutionnaires après sa mort.
Fermat est souvent comme le père de la théorie des nombres moderne. Parmi ses résultats les plus célèbres :

1. Petit théorème de Fermat $a^p \equiv a \bmod p$ (où p est un nombre premier).
2. Nombres premiers de Fermat : il conjectura que les nombres de la forme $2^{2^n}+1$ sont premiers (ce qui s'est avéré faux pour certains cas).
3. L'équation $x^n + y^n = z^n$. Son énoncé le plus célèbre figure dans la marge d'un livre où il écrit qu'il possède une preuve merveilleuse que cette équation n'a pas de solution en nombres entiers pour $n \geq 3$, mais qu'il manque de place pour l'écrire.

Leonhard Euler :
Leonhard Euler (1707 – 1783) était un mathématicien et physicien suisse, considéré comme l'un des plus grands mathématiciens de tous les temps. Il a apporté des contributions fondamentales à de nombreux domaines des mathématiques et la physique, et son travail a influencé le développement de la science moderne.
Euler a posé les bases du calcul moderne. Il a introduit plusieurs notations encore utilisés aujourd'hui, comme :

- e pour la base du logarithme naturel,
- $f(x)$ pour une fonction,
- i pour l'unité imaginaire ($i^2 = -1$),
- Le symbole $\sum$ pour la somme.

En théorie des nombres, Euler a poursuivi les travaux de Fermat et a démontré plusieurs théorème importants, notamment dans l'étude des nombres premiers et des fonctions arithmétiques. En analyse complexe, il a découvert le célèbre formule d'Euler $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ et $e^{i\pi} + 1 = 0$.

Carl Friedrich Gauss :
Carl Friedrich Gauss (1777 – 1855) est un mathématicien, astronome, physicien et géodésien allemand. Il est souvent surnommé le "**Prince des mathématiques**" en raison de ses nombreuses contributions à divers domaines des mathématiques et des sciences.
Il impressionne dès son plus jeune âge par son talent en calcul. À 10 ans, il découvre une méthode rapide pour additionner les nombres de 1 à 100, une

anecdote célèbre qui illustre son génie précoce.
Son livre “Disquisitiones Arithmeticae " jette les bases de la théorie des nombres modernes, où il introduit

- Le symbole de Legendre et la loi de réciprocité quadratique, un résultat fondamentale en arithmétique.
- La construction du polygone régulier à 17 côtés, montrant que certains polygones peuvent être construit à la règle et au compas.
- Les congruences modulo, qui sont à la base de l’arithmétique modulaire et des mathématiques discrètes.

Un étude de la répartition des nombres premiers lui permet de proposer une estimation de leur fréquence à l’ ide de l fonction logarithme.

Chapitre 2

Émergence et développement de certains concepts

L'émergence et le développement des concepts mathématiques résultent d'un longue évolution historique, influencée par les besoins pratiques des civilisations et par l'abstraction progressive des idées mathématiques.

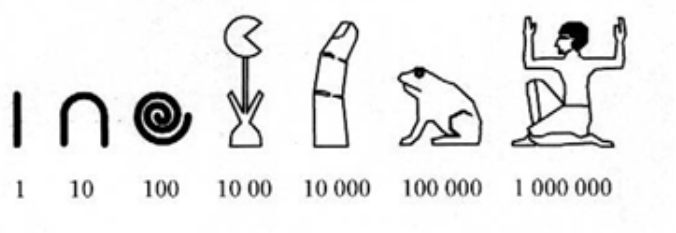
2.1 Concept du nombre

Le concept de nombre est l'un des plus anciens en mathématiques. Le concept de nombre est fondamental en mathématiques et a connu une évolution progressive, passant de simples outils de comptage à des objets abstraits aux propriétés complexes.
Les premiers traces des nombres : les nombres sont nés de la nécessité de compter, mesurer et comparer. Les premières civilisation utilisent des marques sur des os, des bâtons et des pierres (cailloux) pour représenter des quantités.

1. Os d'Ishango (20000 avant J.C.) : Cet os découvert en Afrique montre des encoches organisées selon des motifs numériques, suggérant une forme primitive d'arithmétique.
2. Sumériens et Égyptiens (3000 avant J.C.) : Ils ont développé des systèmes de numération basés sur des symboles pour représenter des quantités.

Les différentes civilisation ont développé des systèmes de numération qui ont influencé les mathématiques modernes :

1. Babyloniens : utilisation d'un système sexagésimal (base 60), encore utilisé aujourd'hui pour mesurer le temps et les angles.
   Les scribes de Babylone n'avaient à leur disposition que 2 chiffres. Le premier, représenté par un clou vertical (𒁹) équivaut au chiffre 1. Le second, un chevron (𒌋), est associé au nombre 10.
2. Égyptiens : développement d'un système décimal basé sur des hiéroglyphes représentant des puissances de 10.



   Un **bâton** pour les **unités**,
   Une **anse** pour les **dizaines**,
   Une **corde enroulée** pour les **centaines**,
   Un **lotus** pour les **milliers**,
   Un **index** pour les **dizaines de millier**,
   Une **grenouille** (ou **têtard**) pour les **centaines de millier**,
   Un **dieu** pour **le million** (qui représentait également l'infini).
3. Romains : Numération additive et soustractive, peu adaptée aux calculs.
4. Indiens et Arabes : Introduction du système décimal positionnel et du zéro, transmis en Europe par les arabes (XIIe siècle).

Avec le temps, les mathématiciens ont généralisé le concept de nombre pour inclure de nouveaux objets :

1. Les nombres entiers $\mathbb{Z}$: sont apparus pour représenter des pertes et des dettes. En Inde (VIIe siècle), Brahmagupta a introduit les nombres négatifs et les règles de calcul associées.
2. Les fractions et les nombres rationnels $\mathbb{Q}$: les fractions sont utilisées depuis l'Antiquité pour représenter les parties d'un tout. Les Égyptiens utilisaient uniquement des fractions unitaires (par exemple : $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$). Les babyloniens et Grecs travaillent avec le fractions plus générales. Les nombres rationnels ont été définis formellement par les mathématiciens modernes comme les rapports de deux nombres entiers.

3. Les nombres réels $\mathbb{R}$: Ils ont été rigoureusement définis par Dedekind et Cantor au XIXe siècle. Ils permettent de représenter les longueurs continues sur une droite.
   Une **coupure** est une partition (A,B) de l'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels tels que tout éléments de A est strictement inférieur à tout éléments de B. Puis un nombre réels est représenter par une coupure.
4. Les nombres complexes $\mathbb{C}$: les nombres complexes ont été introduits pour résoudre certaines équations polynomiales. Cardan (XVIe siècle) a utilisé $i = \sqrt{-1}$ pour résoudre les équations du troisième degré. Euler et Gauss ont donné une interprétation géométrique sur le plan.

2.2 Notion d'équation

La notion d'équation est un pilier central des mathématiques, née du besoin de résoudre des problèmes concrets (commerce, astronomie, architecture) et devenue un concept abstrait fondamental.
Les équations sont apparus avec la nécessité de traduire des problèmes en relations mathématiques.

1. Les Babyloniens (-1800 avant J.C.) : les babyloniens savaient résoudre des équations du premiers et second degré sous forme de problèmes concrets (exemple : trouver la longueur d'un champ connaissant sa surface et un côté). Il utilisent une approche algorithmique sans symbolisme algébrique et tout était exprimé en phrase.
2. Les Égyptiens (-1650 avant J.C.) : Ils utilisaient une méthode appelé "fausse position" : essayer des valeurs et ajuster progressivement.
3. Les Grecs (IVe siècle avant J.C.) : Euclide et Diophante ont étudié les équations sous forme géométrique et numérique. Diophante d'Alexandrie a introduit des équations diophantiennes où seules les solutions entières sont considérées (exemple : $x^2 + y^2 = z^2$).
4. Les arabes (IXe siècle) : Al-Khwarizmi a donné des méthodes systématiques pour résoudre les équations quadratiques (de degré ≤ 2) avec distinction de 6 types d'équations en raison d'absence du zéro et des nombres négatifs.
5. Le développement symbolique de l'algèbre : François Viète (XVIe siècle) a introduit l'usage des lettres pour désigner des inconnues et des coef-

ficients, formalisant les équations. Au $XVIIe$ siècle, René Descartes a introduit la notion moderne d'équation (ex : $ax^2+bx+c=0$).

2.3 Concept de fonction

Depuis les prémices de la naissance du concept de fonction jusqu'à nos jours, la définition de la notion de fonction s'est déclinée sous différentes formulations :

1694 LEIBNIZ (1646-1716) ; J'appelle fonctions toutes les portions des lignes droites, qu'on fait en menant des droites indéfinies, qui répondent au point fixe, et aux points de la courbe.

1718 BERNOULLI J. (1667-1748) ; On appelle fonction d'une grandeur variable une quantité composée de quelque manière que ce soit de cette grandeur variable et de constantes. Notation $\varphi\, x$.

1748 EULER (1707-1783) ; Une quantité constante est une quantité déterminée, qui conserve toujours la même valeur. Une quantité variable est une quantité indéterminée, ou, si l'on veut, une quantité universelle qui comprend toutes les valeurs déterminées. Une fonction de quantité variable est une expression analytique composée, de quelque manière que ce soit, de cette même quantité et de nombres, ou de quantités constantes. Ainsi toute expression analytique, qui outre la variable z contiendra des quantités constantes, est une fonction de z. Euler utilise pour la première fois le terme "fonction" de manière explicite et la définit comme une expression algébrique dépendant d'une ou plusieurs variables.

1782 CONDORCET (1743-1794) ; Je suppose que j'aie un certain nombre de quantités $x,y,z,\ldots$, F, et que pour chaque valeur déterminée de x,y,z, $\ldots$ etc., F ait une ou plusieurs valeurs déterminées qui y répondent : je dis que F est une fonction de $x,y,z\ldots$. Enfin je sais que lorsque x,y,z seront déterminées, F le sera aussi, quand même je ne connaîtrais ni la manière d'exprimer F en x,y, z, ni la forme de l'équation entre F et x,y,z ; je saurai que F est fonction de x,y,z.

1791 LAGRANGE (1736-1813) ; On appelle fonction d'une ou plusieurs quantités, toute expression de calcul dans laquelle ces quantités entrent d'une manière quelconque, mêlées ou non avec d'autres quantités qu'on regarde comme ayant des valeurs données et invariables, tandis que

les quantités de la fonction peuvent recevoir toutes les valeurs possibles. Ainsi dans les fonctions on ne considère que les quantités qu'on suppose variables, sans aucun égard aux constantes qui peuvent y être mêlées.

1821 FOURIER (1768-830) ; En général, la fonction $f(x)$ représente une suite de valeurs ou ordonnées dont chacune est arbitraire.

1834 LOBATCHEVSKY (1792-1856) ; La conception générale exige qu'une fonction de x soit appelée un nombre qui est donné pour chaque x et qui change graduellement en même temps que x. La valeur de la fonction peut être donnée soit par une expression analytique, soit par une condition qui donne un moyen pour tester tous les nombres et sélectionner l'un d'eux ; ou finalement, la dépendance peut exister mais reste inconnue.

1890 WEIERSTRASS, DEDEKIND, CANTOR ; Une fonction est une application qui associe à chaque élément d'un ensemble de départ un unique élément d'un ensemble d'arrivé. Cette définition est basée sur la correspondance (association) entre deux ensembles.

1927 WEYL (1885-1955) ; Personne n'a jamais su expliquer ce qu'est une fonction. Mais une fonction f est définie si par un moyen quelconque on peut associer à un nombre a, un nombre b. On dit alors que b est la valeur de la fonction f pour la valeur a de l'argument.

1939 BOURBAKI ; Soient E et F, deux ensembles distincts ou non, une relation entre une variable x de E et une variable y de F est dite relation fonctionnelle en y ou relation fonctionnelle de E vers F, si pour tout x appartenant à E, il existe un seul y appartenant à F, qui soit dans la relation considérée avec x. On donne le nom de fonction à l'opération qui associe ainsi à tout élément x de E, l'élément y dans F qui se trouve dans la relation donnée avec x ; on dit que y est la valeur de la fonction pour l'élément x, et que la fonction est déterminée par la relation fonctionnelle considérée. En bref, une fonction de E vers F est un triplet (E,F,G) où G est une partie de $E \times F$ vérifiant :

$$\forall x \in E, \quad \exists! y \in F \quad \text{tel que} \quad (x,y) \in G$$

On peut alors s'interroger sur comment on est passé de l'idée de relation entre quantités, très ancienne chez les babyloniens, à la forme actuelle d'une

correspondance entre ensembles, qui à chaque élément de l'ensemble de départ associe un élément de l'ensemble d'arrivée? La plupart des travaux qui abordent l'histoire du concept de fonction s'accordent à distinguer cinq étapes dans cette évolution. Le tableau des valeurs d'une fonction est la première étape de la représentation du concept de fonction. En deuxième étape, vient la représentation géométrique et mécanique d'une fonction. En troisième étape, il y a la représentation d'une fonction par une expression analytique, ensuite l'étape de la représentation d'une fonction comme correspondance quelconque, et en dernière étape la définition ensembliste du concept de fonction.

2.4 Concept d'ensemble

.....à la prochaine.....